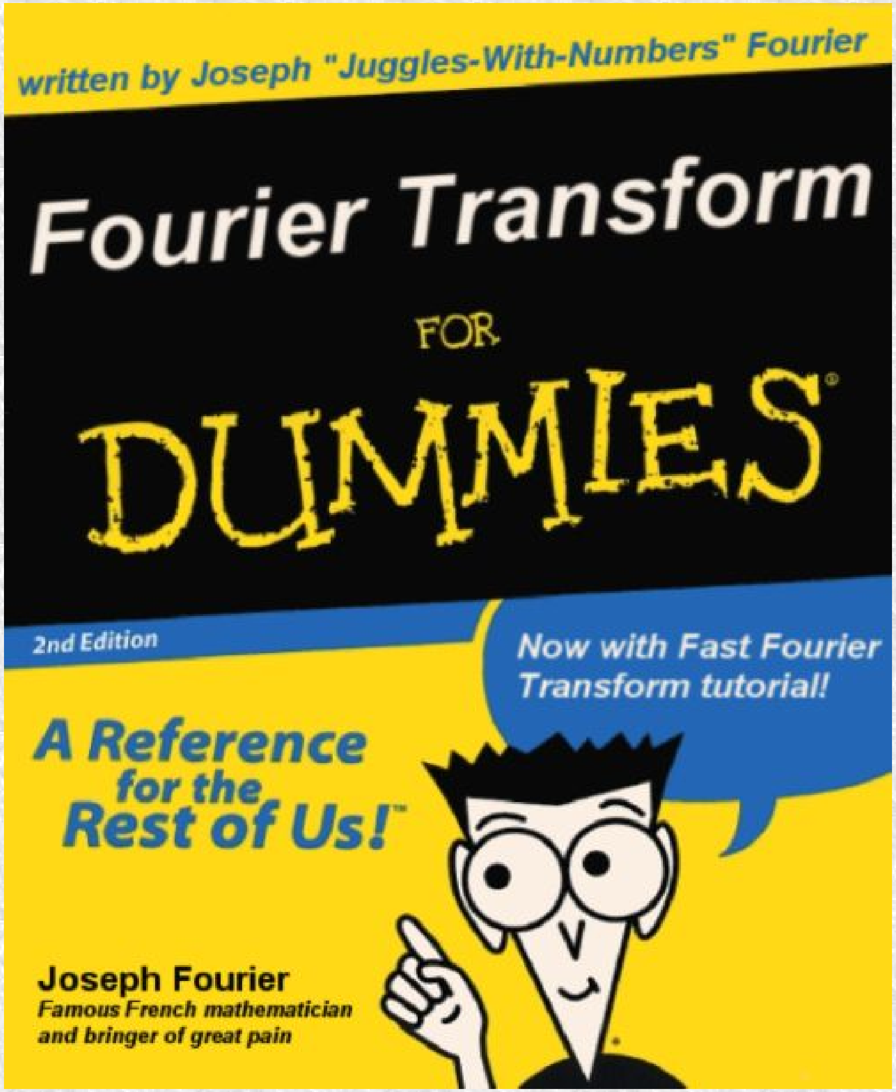
Watermarking di poligonali chiuse tramite descrittori di Fourier



Di Blasi Gianpiero - D.M.I. - Università di Catania

Sommario

- Serie, trasformate e descrittori di Fourier

- Il watermarking

- Marchiare poligonali tramite descrittori di Fourier

Serie di Fourier (1)

- Sia $f(t)$ una funzione definita in $I=[-T/2, T/2]$

- Ciò significa che all'esterno di I la funzione può essere:
  - definita in qualsiasi modo
  - periodica di periodo T
  - non definita

Serie di Fourier (2)

- Siano

$$a_m = a_{-m} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \cos\left(\frac{2m\pi s}{T}\right) ds$$

$$b_m = b_{-m} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \sin\left(\frac{2m\pi s}{T}\right) ds$$

con

$m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Serie di Fourier (3)

- La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (a_m \cos(\frac{2m\pi t}{T}) + b_m \sin(\frac{2m\pi t}{T}))$$

è detta serie di Fourier di $f(t)$

- Sotto particolari ipotesi si dimostra che è convergente in I e converge esattamente ad $f(t)$

Serie di Fourier: osservazioni

- Il coefficiente $a_0/2$ ha l'effetto di spostare l'onda prodotta dalla sommatoria verso l'alto oppure verso il basso rispetto all'asse X

- Il suo significato è quello di valor medio della funzione nell'intervallo [-*T/2, T/2*] infatti

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(s)\,ds$$

Serie di Fourier: altre forme (1)

- Se inoltre poniamo

$$c_m = \bar{c}_{-m} = \frac{a_m - ib_m}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \mathrm{e}^{\frac{-i2m\pi s}{T}} ds$$

ed utilizzando la formula di Eulero $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$

- La serie di Fourier assume la forma esponenziale

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \mathrm{e}^{\frac{i2m\pi t}{T}}$$

Serie di Fourier: altre forme (2)

- Se invece poniamo

$$r_0 = \frac{a_0}{2} ; \theta_0 = 0$$

$$a_m = r_m \cos(\theta_m) ; b_m = -r_m \sin(\theta_m) \quad (m \neq 0)$$

- La serie di Fourier assume la forma

$$f(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} r_m \cos(m \omega t + \theta_m) \quad con \ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

In pratica

- Se $y=f(t)$ rappresenta l'espressione di una legge fisica periodica di periodo T
- La serie di Fourier di $f(t)$ mostra che $y=f(t)$ può essere decomposta nella sovrapposizione di infiniti moti armonici ciascuno di ampiezza r_m, di frequenza $m\omega$ e di sfasamento θ_m
- Si dice in tal caso che la componente m-esima della serie è l'armonica m-esima di $y=f(t)$

Esempio: la funzione coseno

- La funzione coseno $f(t)=\cos(t)$ in $I=[-\pi, \pi]$ è banalmente rappresentabile come serie di Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{+\infty}\left(a_m\cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right)+b_m\sin\left(\frac{2m\pi t}{T}\right)\right)$$

scegliendo

$$a_m=0 \quad \forall\, m\neq 1 ; a_1=1 ; b_m=0 \quad \forall\, m$$

Esempio: la funzione identità (1)

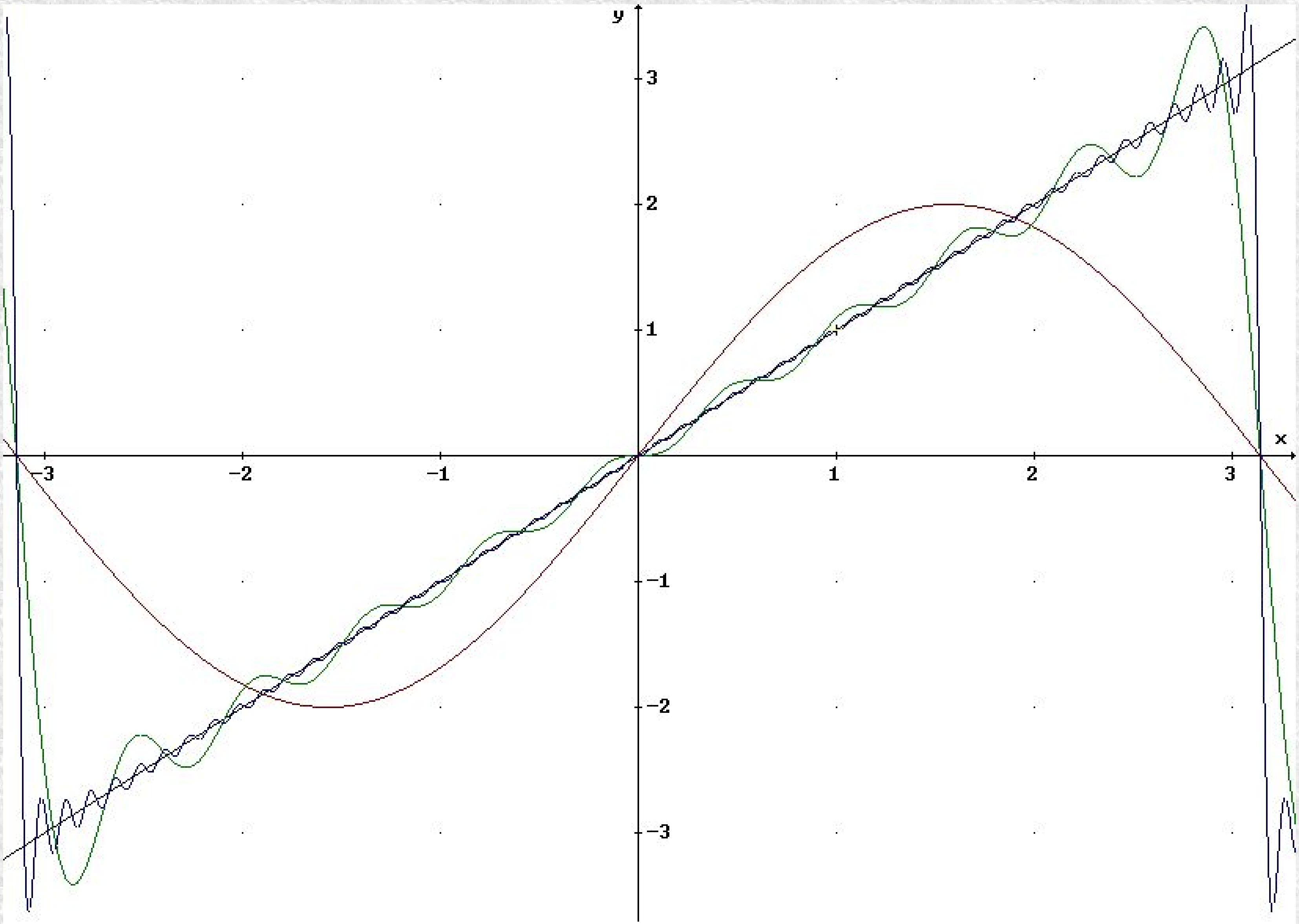
- La retta $f(t)=t$ in $I=[-\pi, \pi]$ ha come serie di Fourier la serie

$$f(t) = -2\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin(mt)$$

- I cui primi termini sono

$$f(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t) - \frac{2}{4}\sin(4t) + \dots$$

Esempio: la funzione identità (2)



Esempio: l'onda quadra (1)

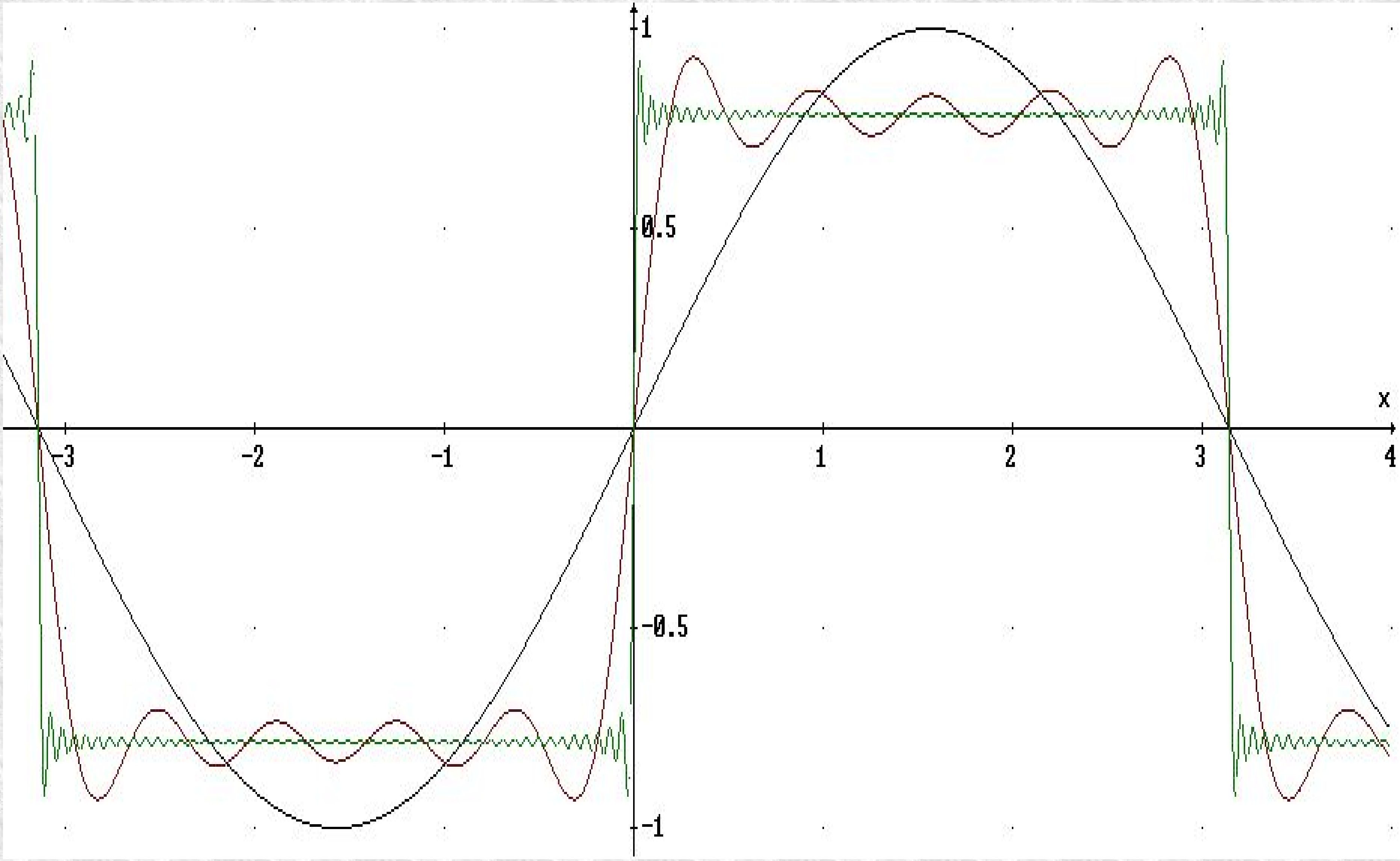
- La funzione onda quadra in $I=[-\pi, \pi]$ ha come serie di Fourier la serie

$$f(t)=\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2m-1} \sin((2m-1)t)$$

- I cui primi termini sono

$$f(t)=\sin(t)+\frac{1}{3}\sin(3t)+\frac{1}{5}\sin(5t)+\frac{1}{7}\sin(7t)+\ldots$$

Esempio: l'onda quadra (2)



La Trasformata di Fourier (1)

- Generalizziamo la serie di Fourier

- Data una funzione *f*(*t*), sotto opportune ipotesi di continuità ed integrabilità si dimostra l'esistenza della funzione

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i2\pi ut}\, dt$$

detta Trasformata di Fourier

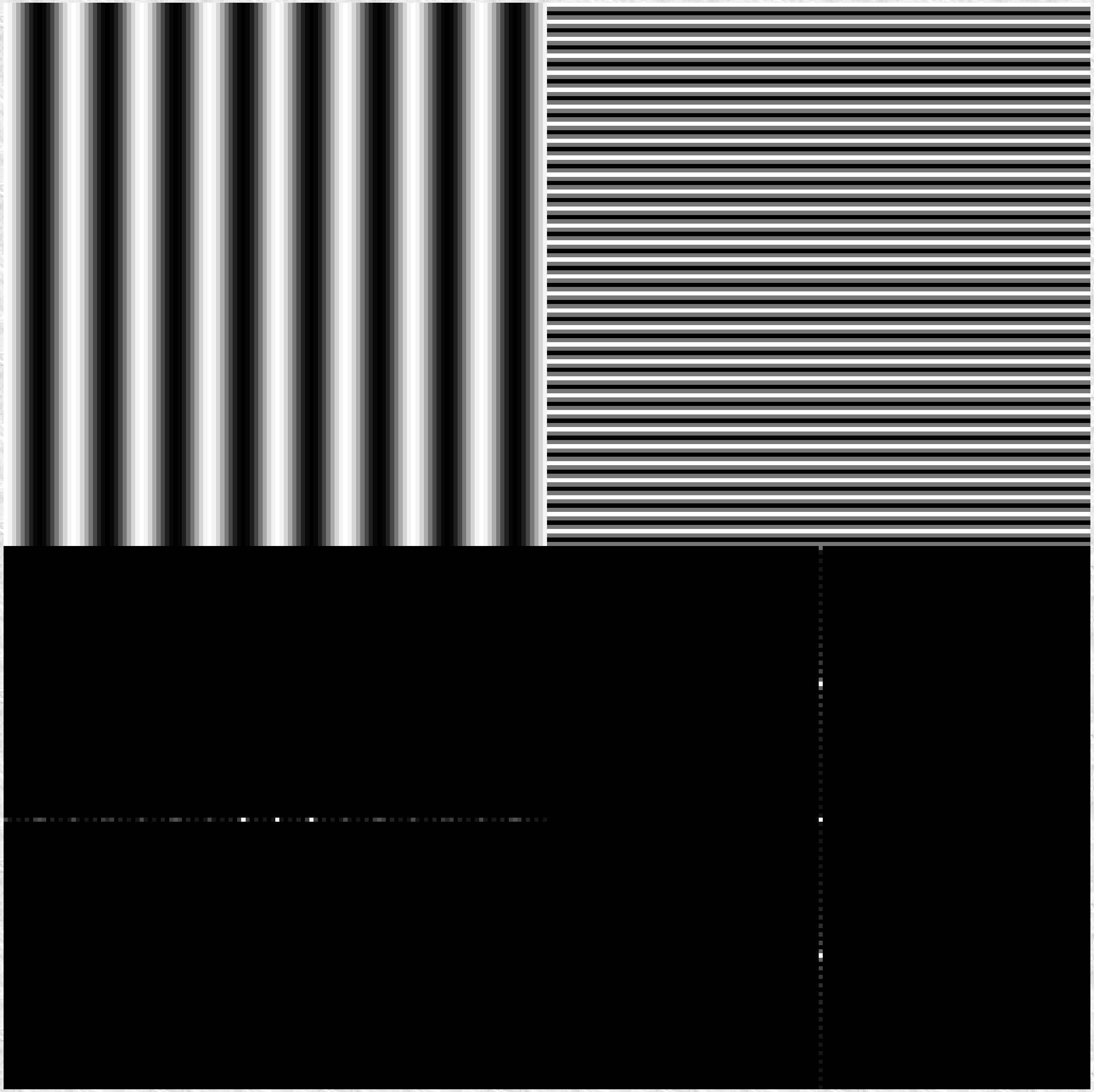
La Trasformata di Fourier (2)

- Data la trasformata $F(u)$ è possibile risalire a $f(t)$ tramite la formula

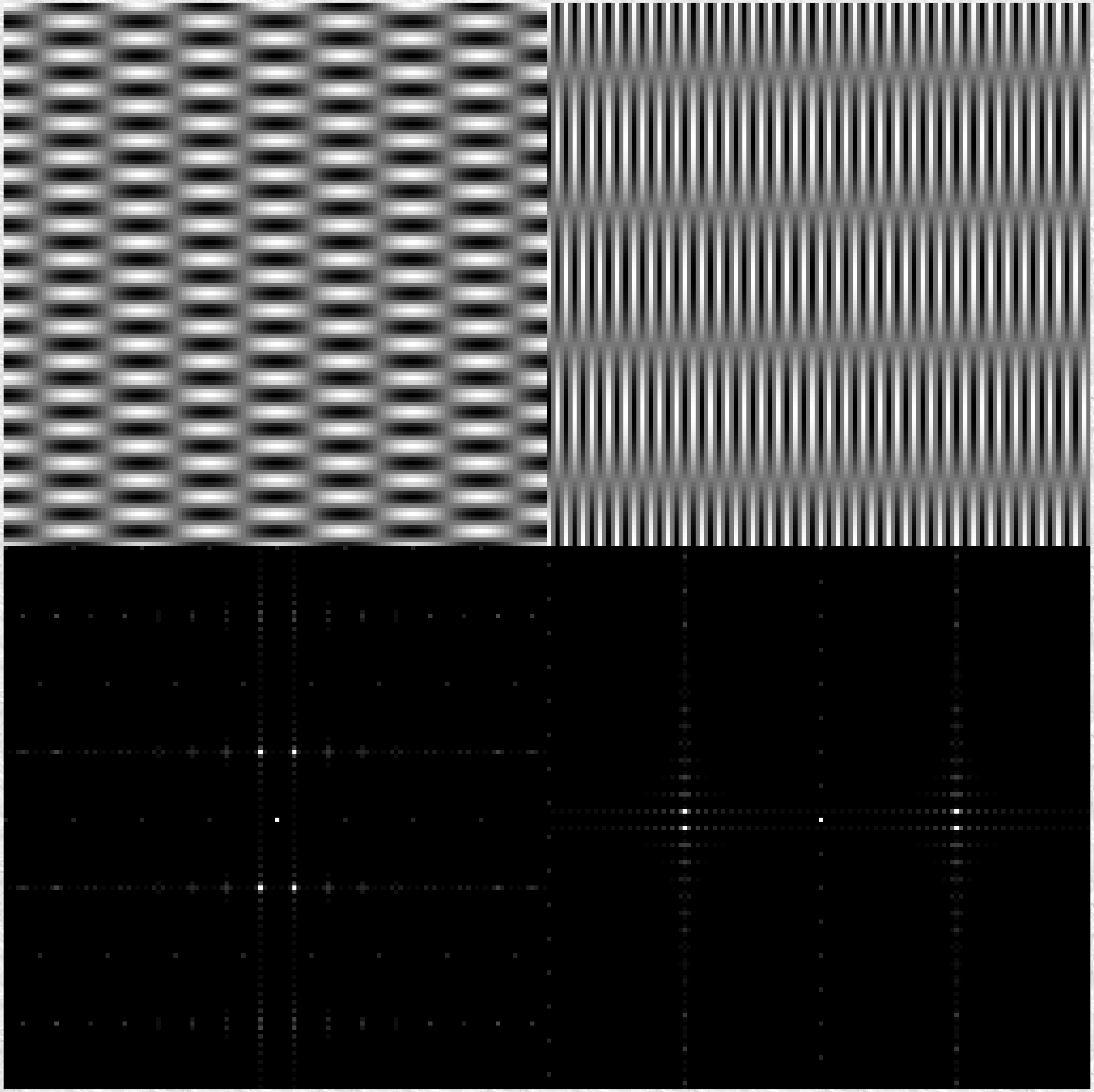
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \mathrm{e}^{i 2\pi ut} du$$

- In pratica la trasformata di Fourier riorganizza i dati in un altro spazio: lo spazio delle frequenze

Esempi sulle immagini (1)



Esempi sulle immagini (2)

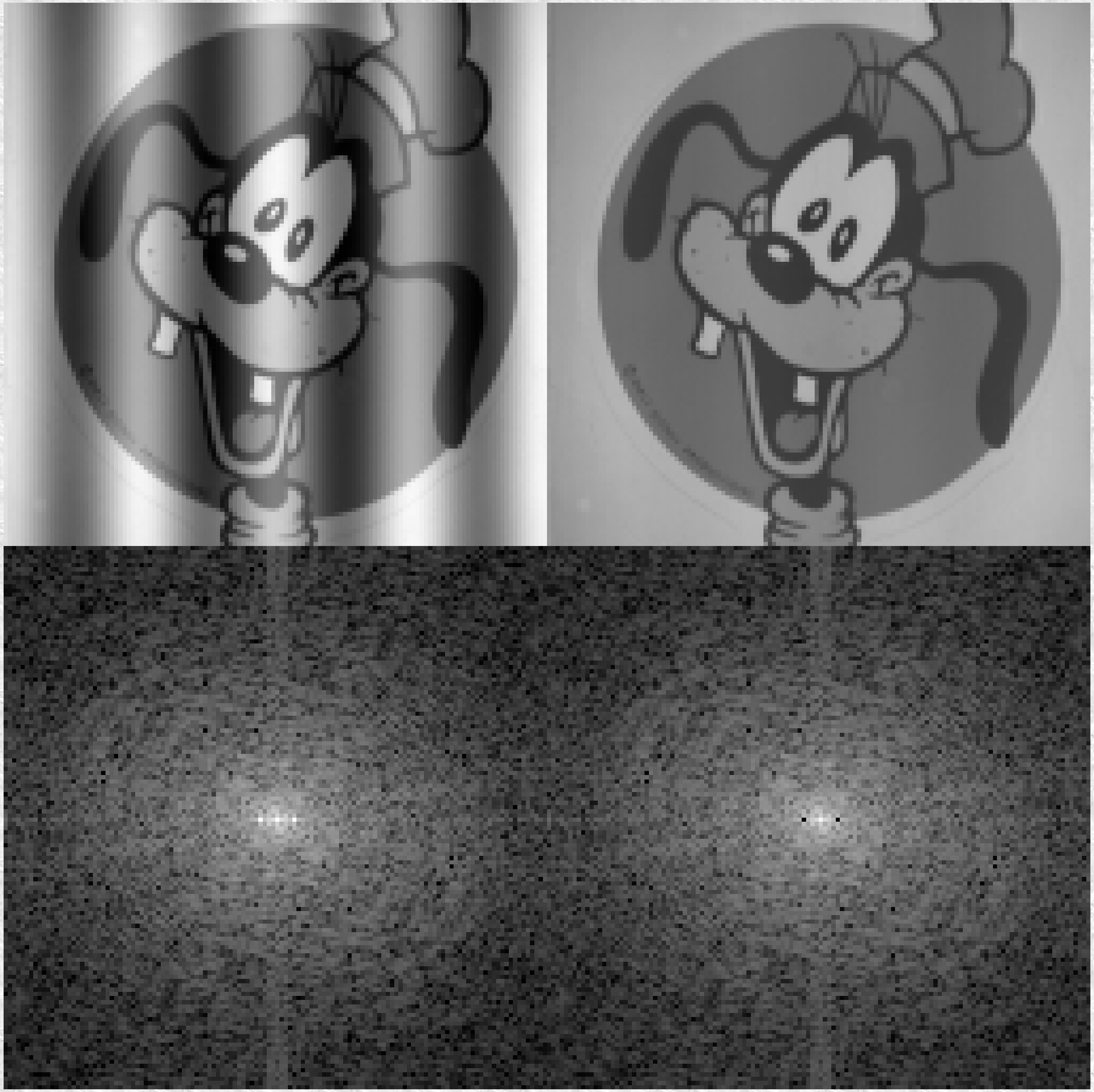


Trasformate di Fourier: vantaggi

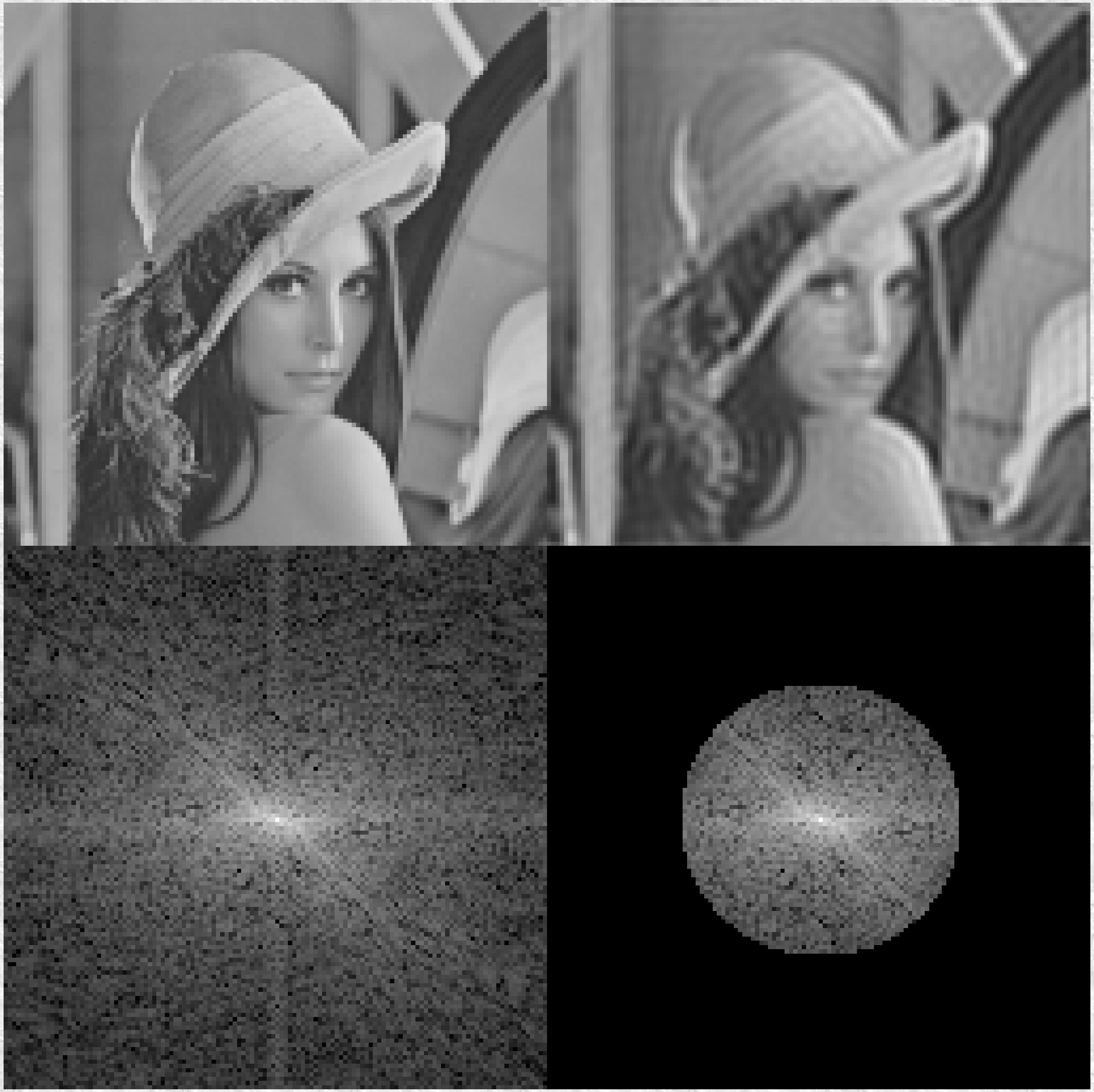
- Che vantaggi si possono ottenere lavorando con le trasformate di Fourier?

- Nello spazio delle frequenze è possibile:
  - sopprimere frequenze indesiderate
  - ridurre lo spazio occupato dai dati pur limitando la degenerazione del segnale (JPEG, MPEG, DivX, MP3)
  - rigenerare segnali degradati

Eliminazione di frequenze



Compressione



La Trasformata discreta di Fourier

- Domanda: data una funzione *f*(*t*) come si realizza una versione discreta della trasformata di Fourier?
- Risposta: dati *N* punti (poniamo *t*=0, ..., *N*-1), la trasformata discreta di Fourier di *f*(*t*) è data da

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(t) \mathrm{e}^{\frac{-i2\pi ut}{N}}$$

- Si può quindi ottenere un'approssimazione di *f*(*t*)

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} F(u) \mathrm{e}^{\frac{i2\pi ut}{N}}$$

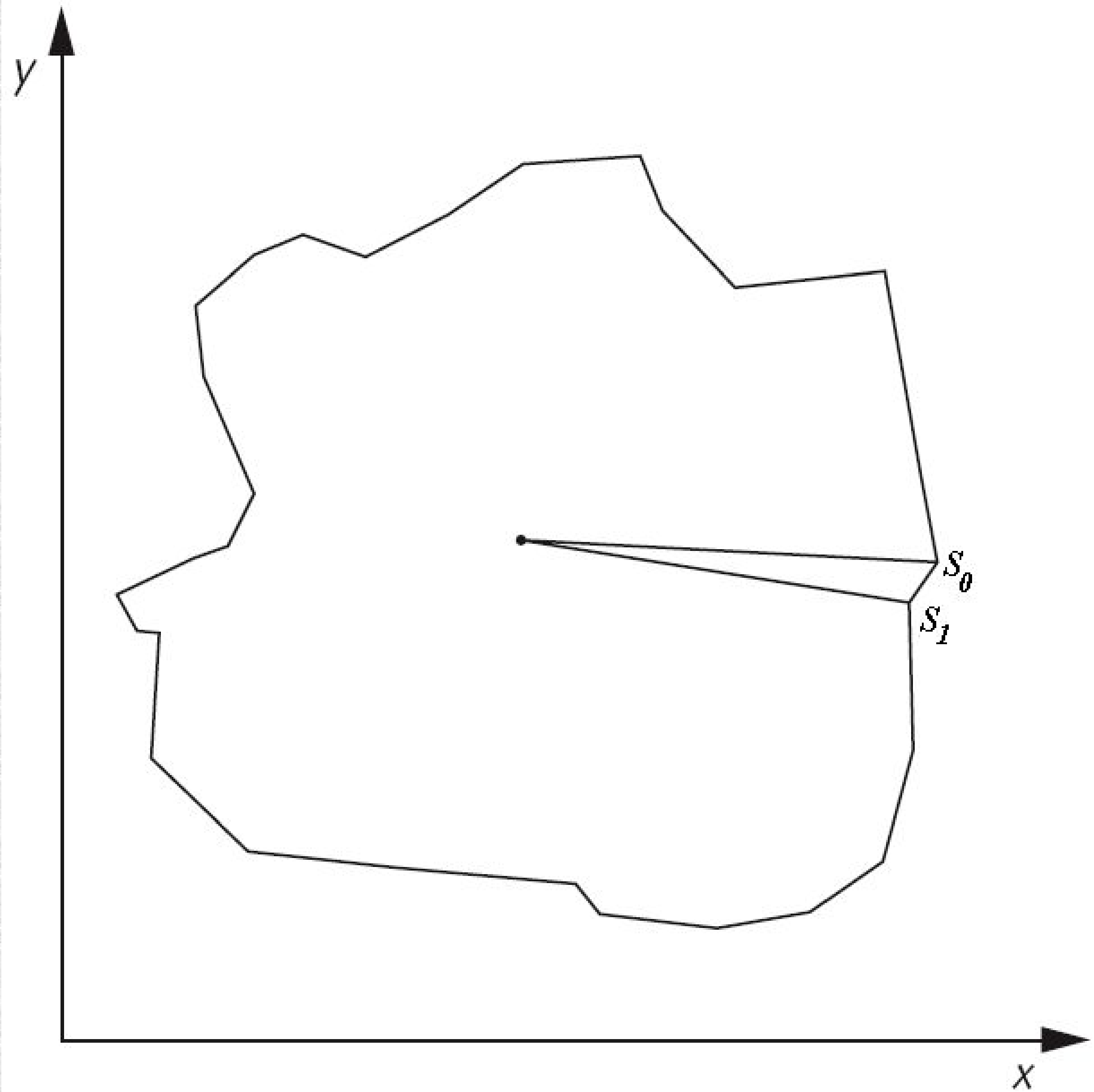
I Descrittori di Fourier (1)

- Un'applicazione interessante della trasformata discreta di Fourier è la rappresentazione di una poligonale chiusa C

- Siano $(x_0, y_0), \ldots, (x_{N-1}, y_{N-1})$ i vertici di C

- I punti possono essere espressi come numeri complessi $s_k = x_k + iy_k$

I Descrittori di Fourier (2)



I Descrittori di Fourier (3)

- Applichiamo adesso la trasformata discreta di Fourier

$$S_u = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \mathrm{e}^{\frac{-i2\pi uk}{N}} \quad con \; u = 0, \ldots, N-1$$

- I termini S_u sono detti *descrittori di Fourier* della curva *C*
- I punti originali si recuperano con la formula

$$s_k = \sum_{u=0}^{N-1} S_u \mathrm{e}^{\frac{i2\pi uk}{N}} \quad con \; k = 0, \ldots, N-1$$

I Descrittori di Fourier (4)

- Se invece si utilizzano solo alcuni descrittori (quelli relativi alle frequenze più basse) si ottiene una poligonale *C′* più smussata di *C*

- Tale poligonale approssimerà *C* con sufficiente dettaglio a seconda del numero di descrittori utilizzati

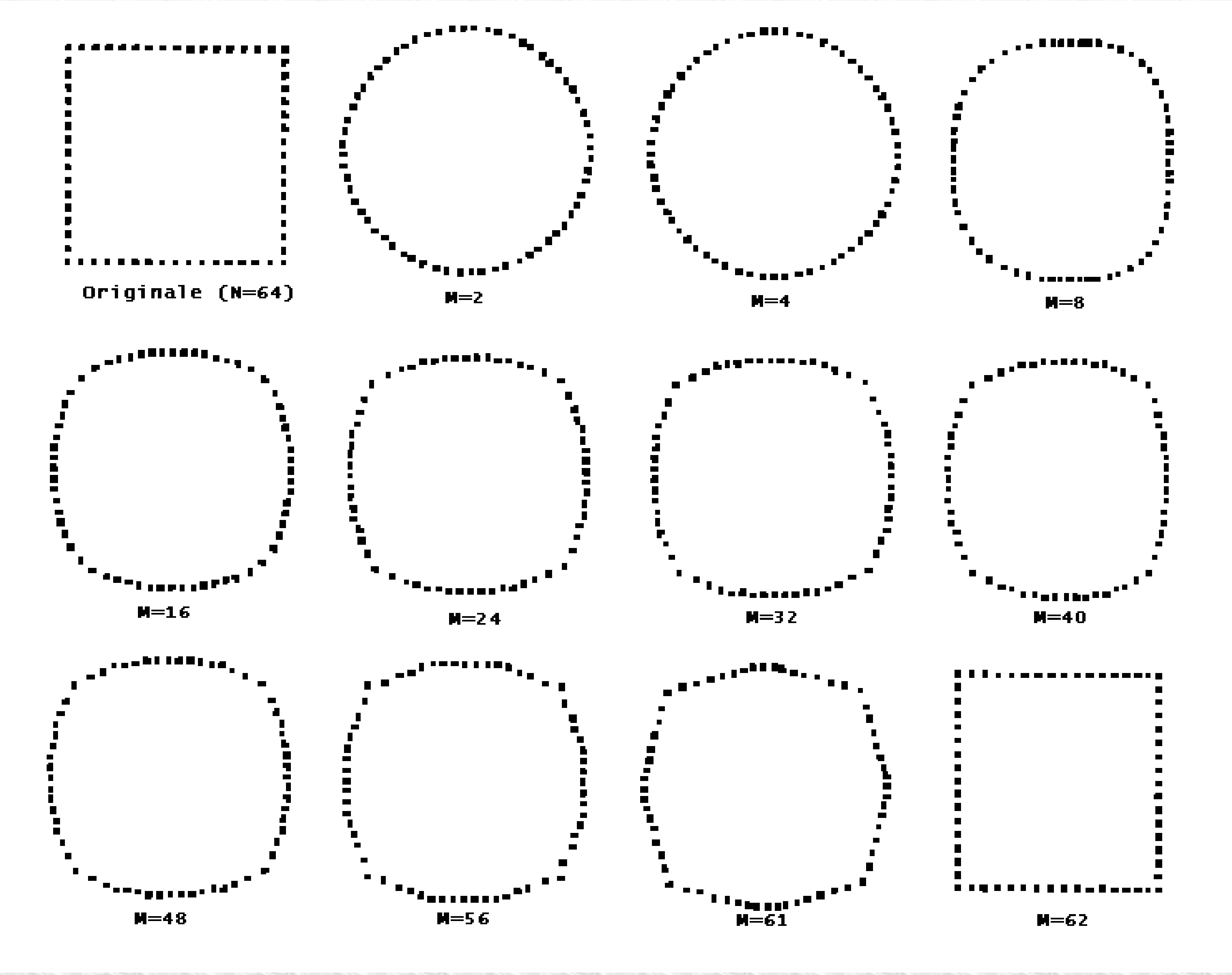
$$S_u' = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M} s_k \mathrm{e}^{\frac{-i 2 \pi u k}{N}} \quad con\ u = 0, \ldots, M \, ; M < N$$

I Descrittori di Fourier: osservazioni

- I coefficienti prossimi ad S_0 rappresentano le basse frequenze mentre i coefficienti prossimi a S_{N-1} rappresentano le alte frequenze
- I coefficienti delle basse frequenze descrivono la “forma generale” della poligonale, mentre i coefficienti delle alte frequenze descrivono i dettagli
- In particolare S_0 rappresenta il centro di gravità

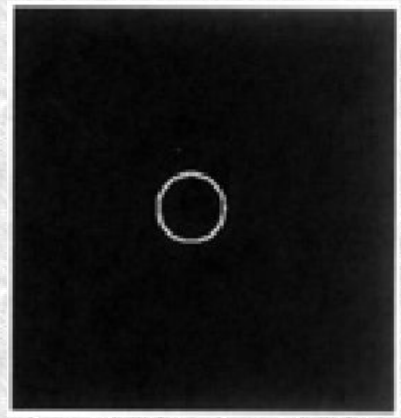
$$S_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k$$

I Descrittori di Fourier: esempi (1)

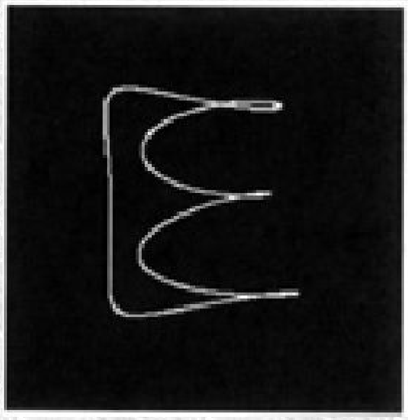


I Descrittori di Fourier: esempi (2)

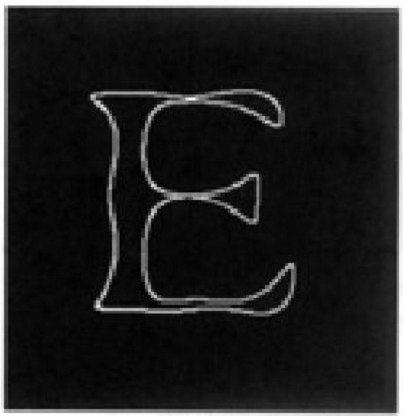
N=1024



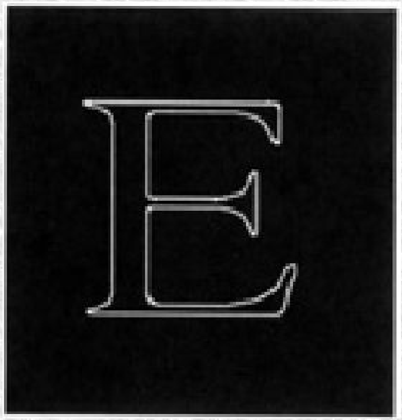
M=3



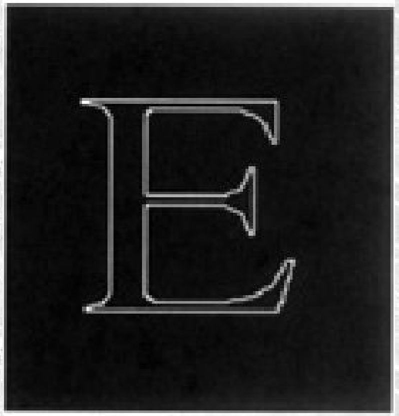
M=21



M=61



M=201



M=401

Traslazione

- Supponiamo di effettuare una traslazione (*dx*, *dy*) della poligonale originale

- I descrittori di Fourier diventeranno

$$s_k^t = s_k + dx + idy$$
$$S_0^t = S_0 + dx + idy$$
$$S_u^t = S_u \quad con\ u \neq 0$$

- Solo la magnitudo del coefficiente S_0 subisce una variazione

Rotazione

- Supponiamo di effettuare una rotazione θ della poligonale originale intorno al centro di gravità

- I descrittori di Fourier diventeranno

$$s_k^r = s_k \mathrm{e}^{i\theta}$$
$$S_u^r = S_u \mathrm{e}^{i\theta}$$

- Le magnitudo dei coefficienti non subiscono variazioni

Scaling

- Supponiamo di effettuare uno scaling di un fattore σ della poligonale originale

- I descrittori di Fourier diventeranno

$$s_k^s = \sigma \, s_k$$
$$S_u^s = \sigma \, S_u$$

- Le magnitudo dei coefficienti subiscono una variazione σ

Cambio del punto di partenza

- Supponiamo di cambiare il punto di partenza della lista dei punti della poligonale originale di *dk* posizioni
- I descrittori di Fourier diventeranno

$$s_k^{sp} = s_{(k+dk) \bmod N}$$

$$S_u^{sp} = S_u \, e^{\frac{i 2\pi u dk}{N}}$$

- Le magnitudo dei coefficienti non subiscono variazioni

Specchio lungo l'asse X

- Supponiamo di creare la poligonale speculare lungo l'asse X della poligonale originale
- I descrittori di Fourier diventeranno

$$s_k^m = \bar{s}_k$$

$$S_0^m = \bar{S}_0$$

$$S_u^m = \bar{S}_{N-u} \quad con\ u \neq 1$$

- La magnitudo di S_0 non subisce variazioni, le altre vengono “scambiate” di posto
- Specchio lungo un asse α=rotazione+specchio X

Inversione di percorrenza

- Supponiamo di invertire il verso di percorrenza dei punti della poligonale originale

- I descrittori di Fourier diventeranno

$$s_k^i = s_{N-k}$$
$$S_0^i = S_0$$
$$S_u^i = S_{N-u} \quad con\ u \neq 1$$

- La magnitudo di S_0 non subisce variazioni, le altre vengono “scambiate” di posto

Campi di applicazione (immagini)

- Shape Classification
- Similarity Estimation
- Image Retrivial
- Pattern matching
- Watermarking

Watermarking (1)

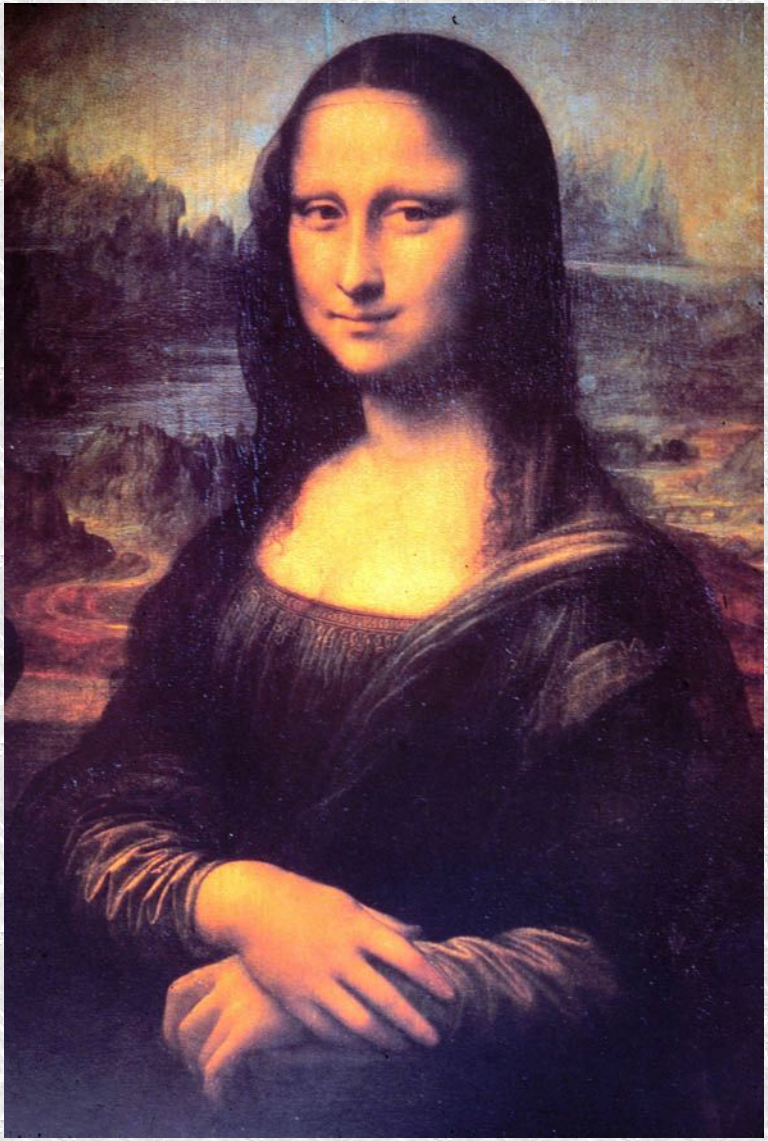
- Il Watermarking rappresenta uno dei temi più caldi nel campo della Computer Vision
- Con la diffusione di Internet si è fatta pressante l'esigenza di tutelare il cosiddetto “copyright” o più semplicemente la possibilità di dimostrare la “paternità” di un'opera digitale
- Il problema nasce dal fatto che la copia di un prodotto digitale è identica all'originale e pertanto indistinguibile

Watermarking (2)

- Il Watermarking deve
  - individuare le violazioni di copyright su immagini
  - realizzare marchi digitali: parti integranti dell'immagine ma impercettibili quindi *trasparenti come l'acqua*
  - difendere l'informazione da attacchi volti a rimuovere il marchio senza curarsi se sia nota o meno l'esistenza del marchio stesso
- Inoltre il Watermarking deve essere “robusto”: non deve essere possibile rimuovere il marchio senza conoscere la chiave utilizzata per generarlo

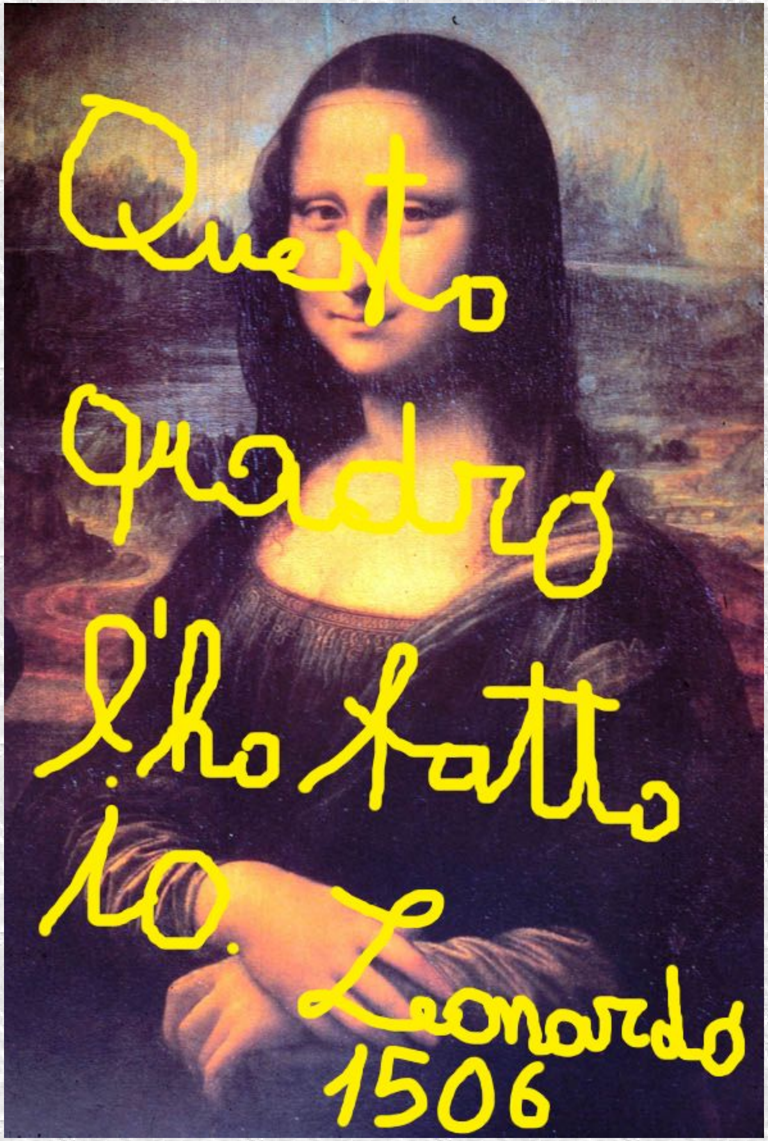
Che vuol dire fare Watermarking? (1)

Supponiamo che Leonardo dopo aver dipinto la Gioconda l'avesse voluta “marchiare”



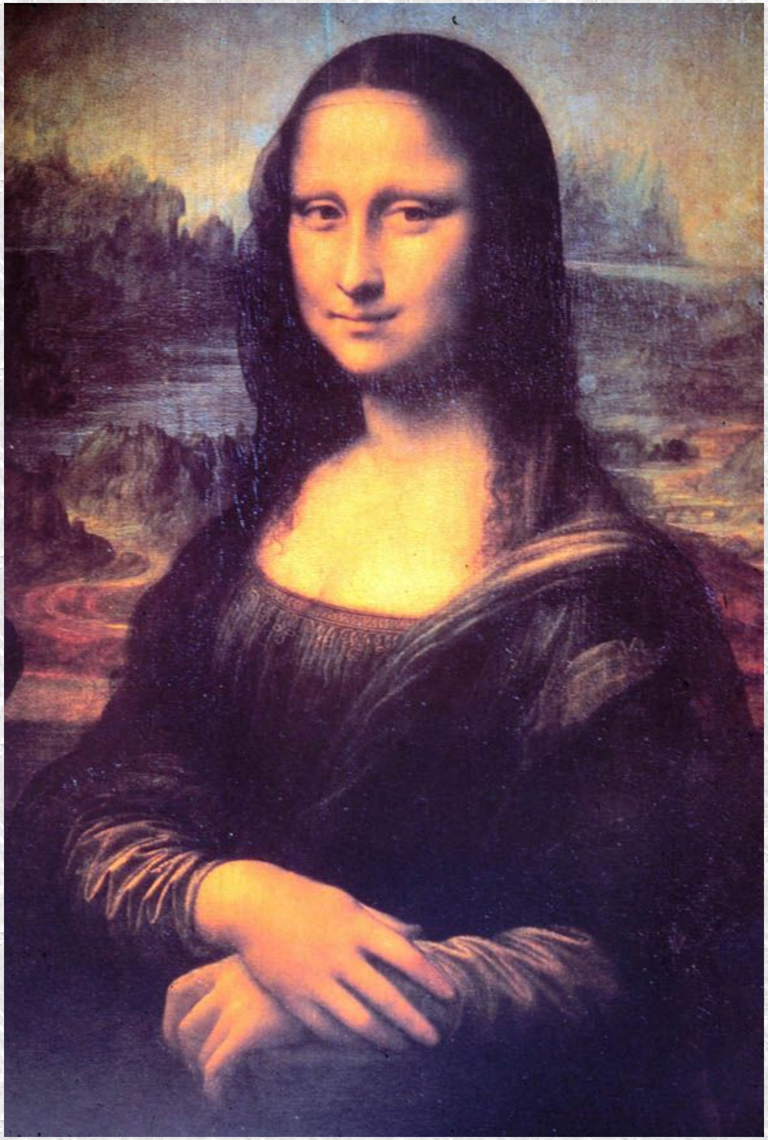
Che vuol dire fare Watermarking? (2)

Questo non è un buon
metodo di marchiatura



Che vuol dire fare Watermarking? (3)

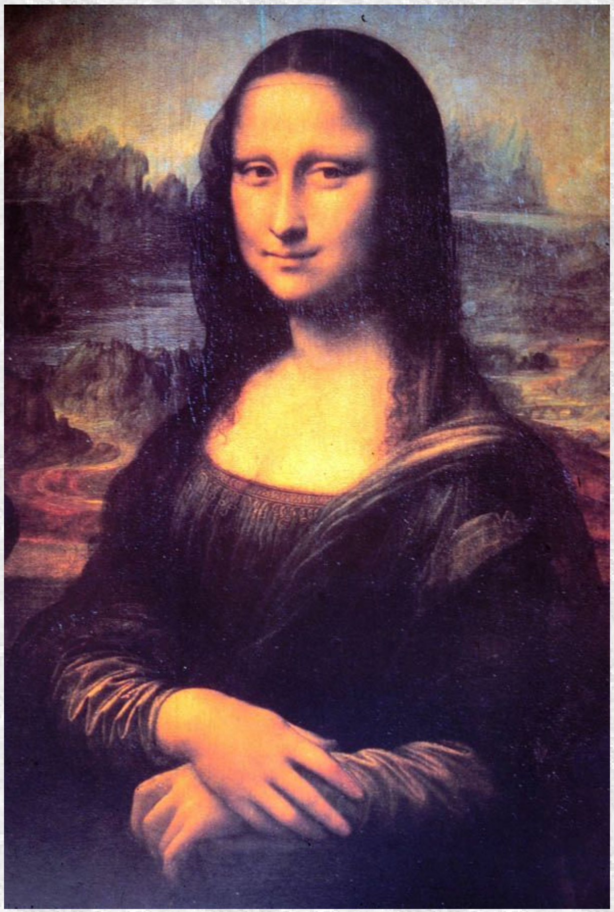
Questo può essere considerato un buon metodo anche se molto fragile



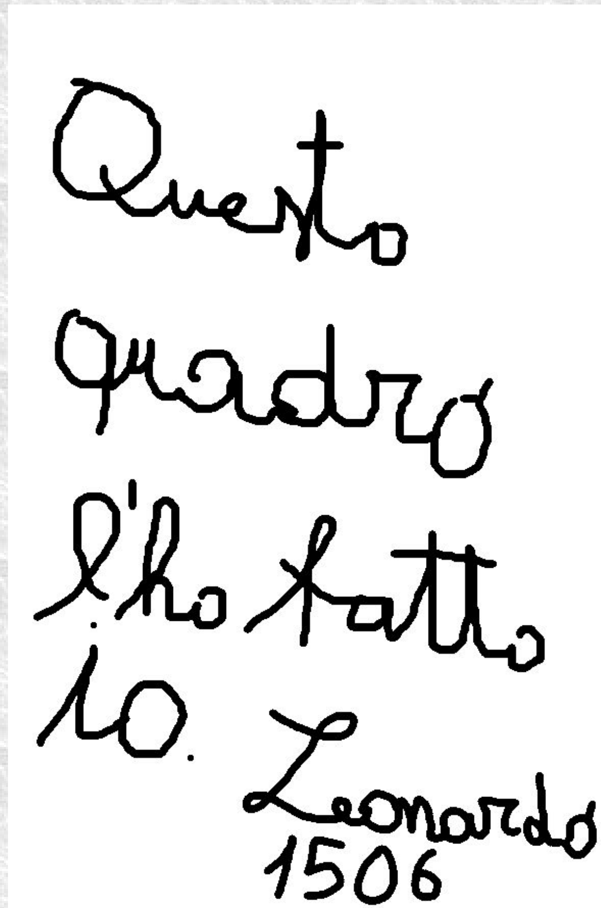
Che vuol dire fare Watermarking? (4)

- Come è stato ottenuto questo effetto?
- Con i seguenti passi
  - E' stata presa l'immagine originale della Gioconda
  - E' stato posto a zero l'ultimo bit di tutti i pixel
  - E' stato posto ad uno l'ultimo bit di ogni pixel il cui corrispondente pixel dell'immagine della firma era nero
- Vedere il file *SimpleWatermarker.java* per maggiori dettagli

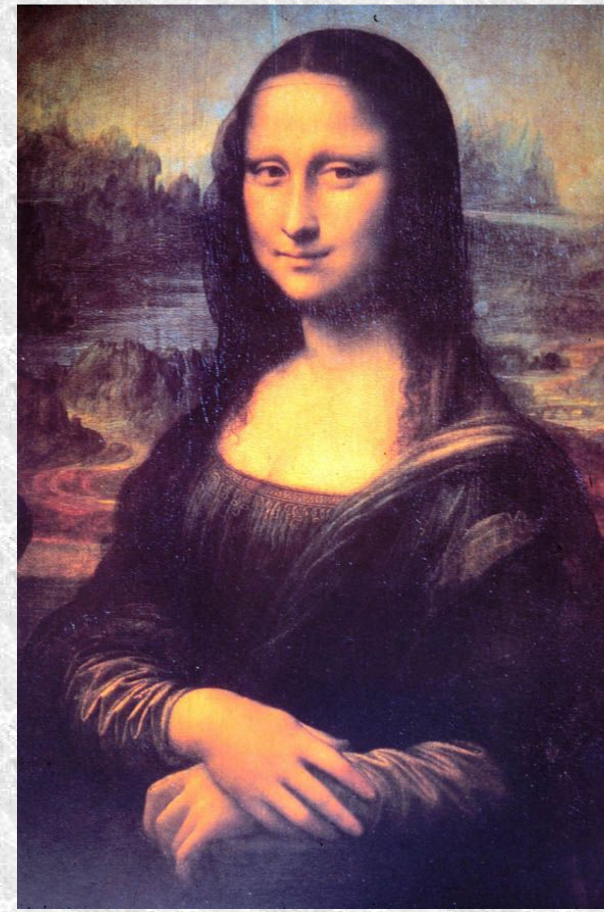
Che vuol dire fare Watermarking? (5)



+



=



Che vuol dire fare Watermarking? (6)

- Come già detto questo tipo di marchio è molto fragile

- Infatti è poco resistente a:
  - operazioni sul colore
  - ritagli dell'immagine
  - forti zooming

Watermarking e vettoriale

- Fino ad ora si è fatto riferimento sempre ad immagini digitali “raster”
- Molte applicazioni usano però immagini vettoriali (mappe, dati GIS, grafica 2D, SVG)
- Nel campo vettoriale le tecniche di watermarking raster non sono utilizzabili
- I descrittori di Fourier sono una tecnica per effettuare il watermarking vettoriale

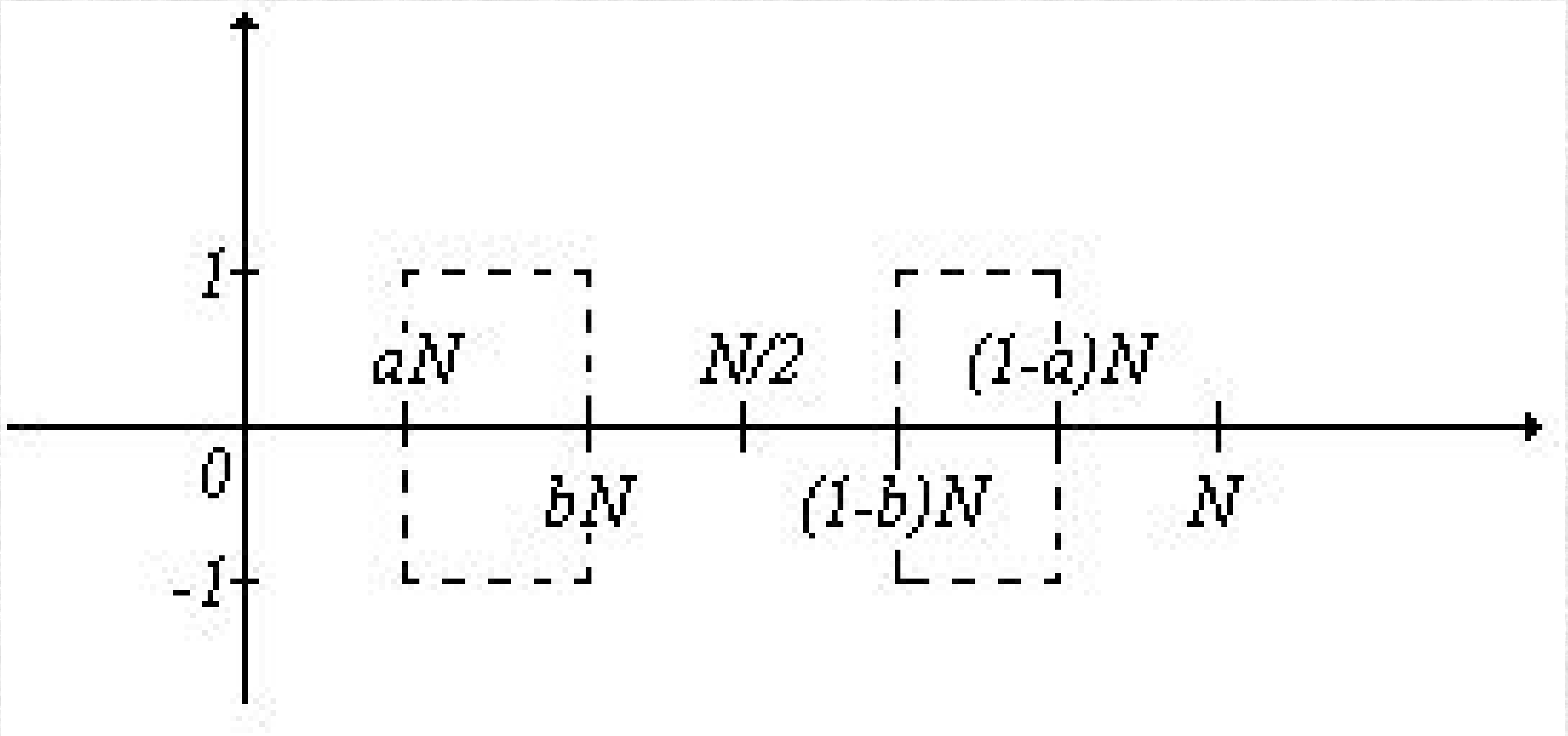
Creazione del “marchio” (1)

- Utilizzando un generatore di numeri pseudo casuali si crea una sequenza a due valori (+1 e -1) di numeri
- La funzione marchio è definita da

$$W_u = \begin{cases} 0 & \begin{array}{l} se\, u < aN \\ oppure\, bN < u < (1-b)N \\ oppure\, (1-a)N < u \end{array} \\ \pm 1 & \begin{array}{l} se\, aN < u < bN \\ oppure\, (1-b)N < u < (1-a)N \end{array} \end{cases}$$

Con $0<a<b<0.5$

Creazione del “marchio” (2)



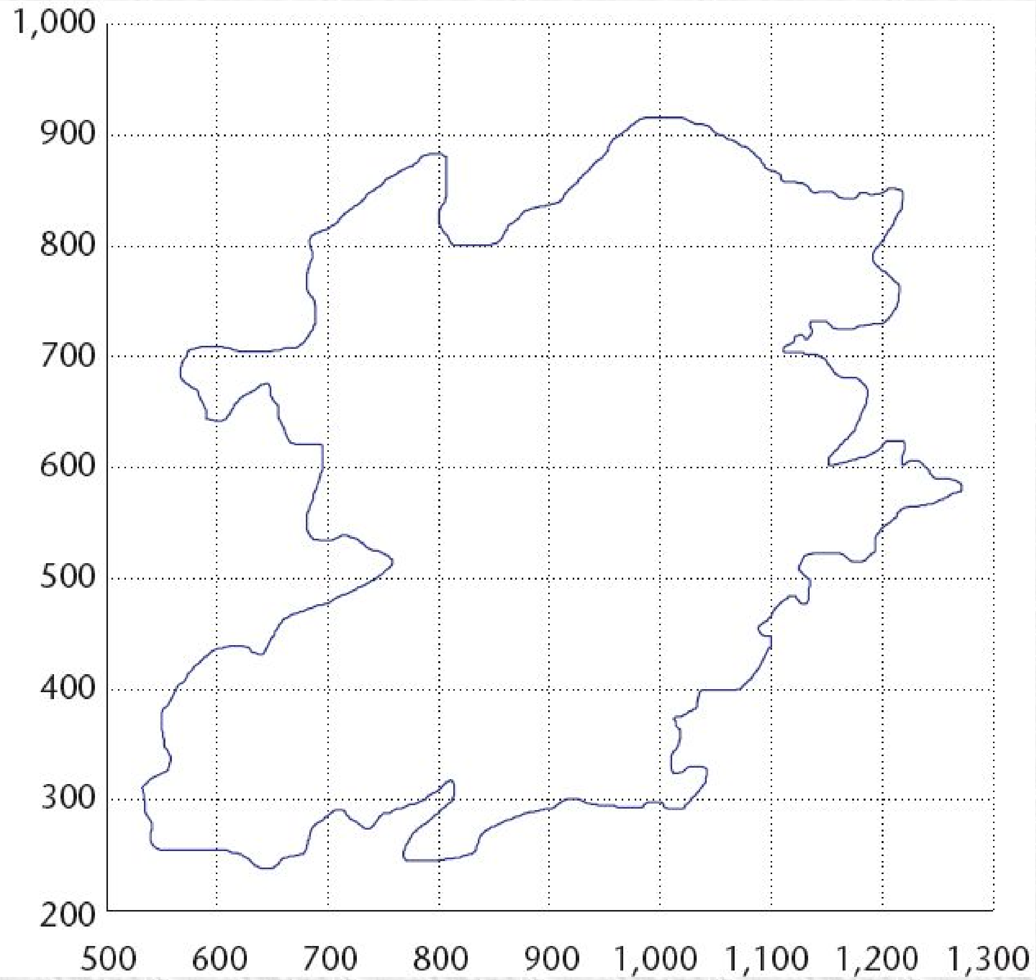
Creazione del "marchio" (3)

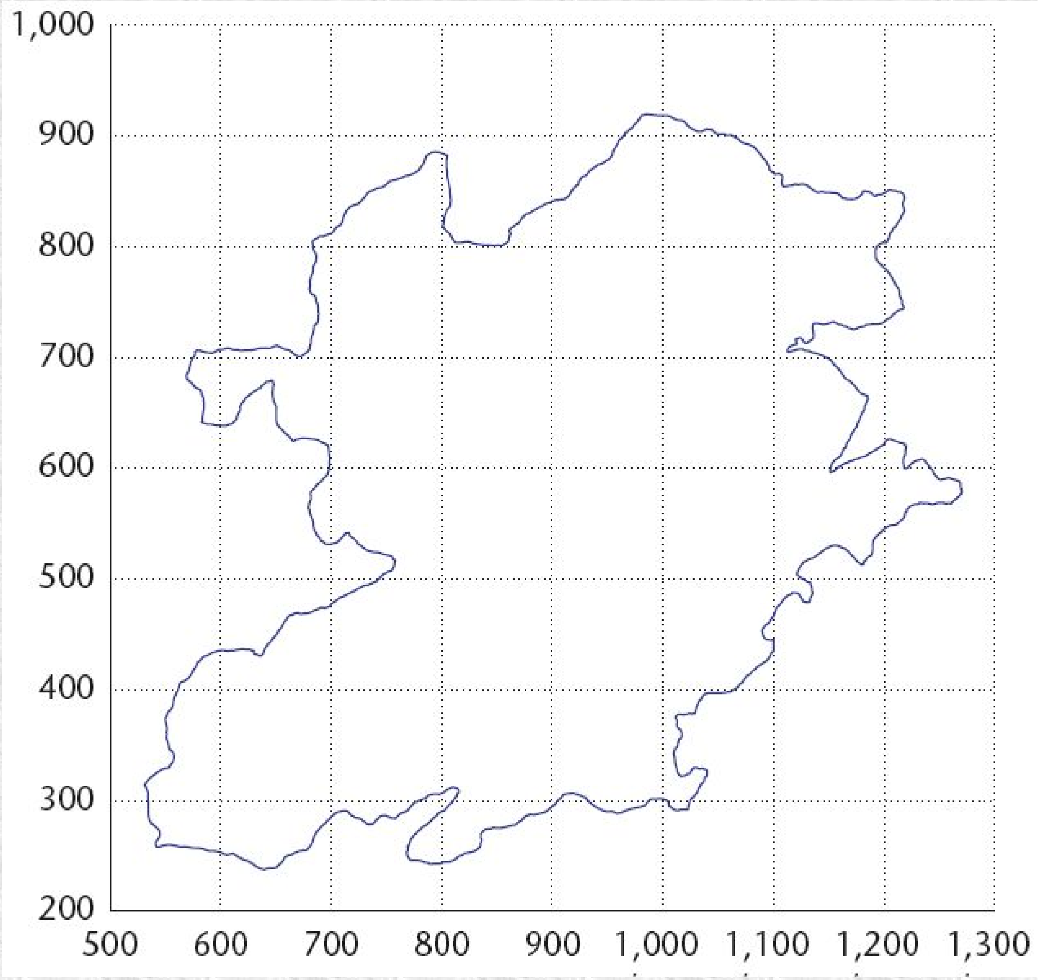
- Il watermarking è quindi effettuato sulle magnitudo dei coefficienti

$$|S'_u| = |S_u|(1 + pW_u)$$
$$con\ p < 1$$

- A questo punto è possibile recuperare i punti originali "marchiati" e ricostruire la poligonale

Creazione del “marchio” (4)





Identificazione del “marchio” (1)

- Siano $|S'_u|$ le magnitudo dei coefficienti di una poligonale “marchiata”
- Consideriamo la funzione di correlazione tra tali magnitudo ed un marchio $\hat{W}$

$$c = \sum_{u=0}^{N-1} |S'_u| \hat{W}_u = \sum_{u=0}^{N-1} |S_u| (1 + pW_u) \hat{W}_u$$

- Se $W = \hat{W}$ si ha

$$c = \sum_{u=0}^{N-1} |S_u| W_u + p |S_u| W_u^2$$

Identificazione del "marchio" (2)

- Nelle ipotesi che W ed S_u siano indipendenti e che W abbia media zero, il valore medio di c è

$$\mu_c = \begin{cases} \dfrac{1}{2(b-a)N} \sum_{u \in A} p|S_u| \; (=\mu_{S_u}) & se \; W = \hat{W} \\ 0 & se \, W \neq \hat{W} \\ 0 & se \, non \, è \; presente \, alcun \, marchio \end{cases}$$

$$con \; A = \{ u \in \mathbb{N} \; tali \; che \; aN \leqslant u \leqslant bN \; , (1-a)N \leqslant u \leqslant (1-b)N \}$$

Identificazione del “marchio” (3)

- La formula appena vista sembra non utilizzabile poiché S_u non è (ovviamente) nota
- Ma poiché per ipotesi W ha media zero si ha:

$$\mu_{|S_u'|} = \mu_{|S_u(1+pW_u)|} = \mu_{|S_u|} + \mu_{|p S_u W_u|} = \mu_{|S_u|} = \mu_c$$

- Quindi è nota anche la media di *c* ed è possibile normalizzare *c* nell'intervallo [0, 1] dividendolo per tale valor medio
- Si noti che $c=1$ se e solo se $W=\hat{W}$ da cui potremo dire che $\hat{W}$ è il marchio di una poligonale se $c \geq T$

Verifica di robustezza

- La traslazione modifica solo il primo termine, quindi basta imporre $a>0$ per escludere il termine stesso dalle procedure di marchiatura ed identificazione
- Il metodo è robusto alle rotazioni, ai cambi di punto di partenza, agli specchi ed alle inversioni di percorrenza poiché tali operazioni non modificano la magnitudo dei coefficienti
- Lo scaling modifica di un fattore σ tutte le magnitudo, e quindi anche la media, quindi nel processo di normalizzazione σ viene eliminato

Osservazioni finali

- Questa tecnica si è dimostrata robusta anche ad attacchi di tipo:
  - filtro mediano
  - rumore Gaussiano
  - combinazioni di tutti i precedenti attacchi

- Rimangono ancora da risolvere attacchi di tipo:
  - inserimento di punti
  - cancellazione di punti

Bibliografia

- Solachidis V., Pitas I. *Watermarking Polygonal Lines Using Fourier Descriptors*. *IEEE CG&A*, Volume 24, Issue 3, May-Jun 2004
- Jain A.K. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, 1989
- Serie, trasformate e descrittori di Fourier http://www.dm.unibo.it/~ferri/hm/matvis03_04.ppt
- Introduzione al Watermarking http://www.beta.it/magazine/article.beta?a=bngraf200006333065115101981 21&r=BETA&lang=IT